PS2315. "Sistemas".
Dpto. Procesos y Sistemas.
Univ. Simón Bolívar
Trimestre Sep-Dic 2011
Prof. José Ferrer.

Fecha de Entrega: Viernes 11 de noviembre.

Tarea 6. (P.1).

Problema 1: Determine la transformada de Laplace de las siguientes señales

a) $x_a(t) = e^{-t}\,\mathrm{esc}(t)$

b) $x_b(t) = -e^{t}\,\mathrm{esc}(t)$

c) $x_c(t) = e^{-|t|}$, $t \in (-\infty, +\infty)$.

Problema 2: Determine la transformada de Laplace y su respectiva región de convergencia de las siguientes señales:

a) $x_a(t) = \mathrm{esc}(t) - \mathrm{esc}(t-1)$

b) $x_b(t) = t\,\mathrm{esc}(t) - 2\,(t-1)\,\mathrm{esc}(t-1)$

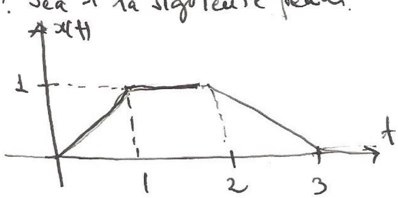
c) $x_c(t) = 2\delta(t) + 3e^{-t}\,\mathrm{esc}(t) + 4e^{t}\,u(-t)$, $t \in (-\infty, +\infty)$

Problema 3: Si q^{-1} representa el operador de retardo temporal de una unidad de tiempo; i.e.

$$x(t) \longrightarrow \boxed{q^{-1}} \longrightarrow x(t-1)$$

Determine la transformada de Laplace de $q^{-N}x$ en términos de $\hat{x}(s)$

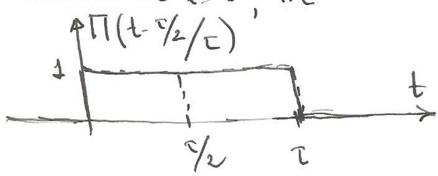
Problema 4: Sea x la siguiente señal



a) exprese $x(t)$ como una combinación lineal de las señales elementales $\{\mathrm{esc}, \mathrm{ramp}\}$.

b) Determine la transformada de Laplace de x

Problema 5: Sea $\Pi\left(\frac{t-\tau/2}{\tau}\right)$ la señal pulso unitario de duración τ segundos y centrado en $t = \tau$; i.e



y defina la réplica periódica causal de ésta como

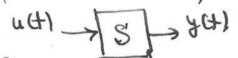
$$\Pi_h(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \Pi\left(\frac{t-n\frac{h}{2}}{\tau}\right) = $$
$$= \Pi\left(\frac{t-\tau/2}{\tau}\right) * \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t-nh)$$

a) Grafique $\Pi_h(t)$ para $h = 1/2 , 2$ si $\tau = 1$.

b) Determine la transformada de Laplace de $\Pi_h(t)$. Exprese $\hat{\Pi}_h(s)$ en forma cerrada empleando la relación

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a} \quad \text{si } |a| < 1.$$

<u>Problema 6</u>: Sea S un sistema lineal y invariante en el tiempo y <u>causal</u>



cuya función de transferencia es

$$\hat{h}(s) = \frac{s+1}{s^2+5s+6} \in \mathbb{R}(s)$$

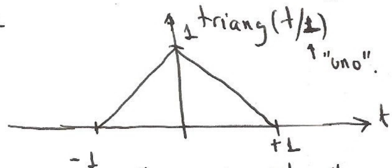
Determine la respuesta $y(t)$ del sistema cuando

i) $u(t) = \cos 2t$, $t \in (-\infty, +\infty)$

ii) $u(t) = e^{-t}\,\mathrm{esc}(t)$; $t \in (-\infty, +\infty)$

iii) $u(t) = \cos(2\pi t)\,\mathrm{triang}(t/2)$, $t \in (-\infty, +\infty)$

donde



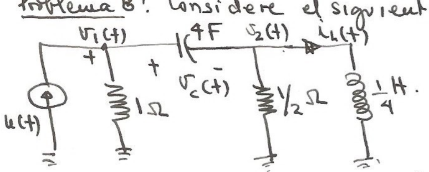
"señal triángulo".

<u>Problema 7</u>: Dada las transformadas de Laplace siguientes, determine las correspondientes señales <u>causales</u> $x(t)$. :

a) $\hat{x}_a(s) = \dfrac{1}{s(s+1)}$; b) $\hat{x}_b(s) = \dfrac{s+7}{(s+2)(s+4)}$; c) $\hat{x}_c(s) = \dfrac{s}{(s+1)^2(s+2)}$

<u>Nota</u>: $\hat{x}_c(s)$ tiene polo <u>doble</u> en $s = -1$.

<u>Problema 8</u>: Considere el siguiente sistema eléctrico; donde $u(t) = 10\,\mathrm{esc}(t)$ con las condiciones iniciales $v_c(0^-) = 2V$, $i_L(0^-) = 20A$.



a) Determine las ecuaciones fundamentales del sistema

b) Exprese las ecuaciones obtenidas en (a) en el dominio frecuencial s (incluyendo las CI's)

c) Determine la función de transferencia $\hat{h}(s)$ si la salida es $y(t) = v_2(t)$.

Problema 9: Encuentre la Transformada-Z de las siguientes señales de tiempo discreto. y sus respectivas regiones de convergencia

a) $f_a(k) = \begin{cases} 1, & k \geq 0 \\ 2^k; & k < 0 \end{cases}$ b) $f_b(k) = \begin{cases} 2^k; & k \geq 0 \\ 3^k, & k < 0 \end{cases}$; c) $f_c(k) = \mathrm{ramp}(k)$

c) $f_c(k) = \mathrm{parab}(k)$.

Problema 10: Determine la transformada-Z de la secuencia

$$f(k) = f_a(k) - f_b(k)$$

donde f_a, f_b son las definidas en problema 9. Determine y grafique la región de convergencia de f.

Problema 11: Empleando la transformada-Z resuelva las siguientes ecuaciones diferencias

a) $y(k+1) + 10y(k) = 2^n \mathrm{esc}(k)$ para $y(0) = 1$.

b) $(\sigma^2 + 5\sigma + 6)y(k) = u(k)$; cuando $u(k) = \delta(k)$, $y(0) = y(1) = 0$.

Problema 12: Determine la señal de tiempo discreta y causal, $x(k)$, cuya transformada-Z es

a) $\hat{x}_a(z) = \dfrac{z(z-3)}{(z-1)(z-2)}$

b) $\hat{x}_c(z) = \dfrac{4(z-3)}{z(z-1)(z-2)^2}$ (polo doble en $z=2$)

c) $\hat{x}_c(z) = \dfrac{1}{(z-1)^2(z-2)}$.

///.

"Suerte".

Problema 9: (Controlabilidad) Un sistema S de tiempo discreto está descrito por:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} u(k)$$

$y(k) = Cx(k) + Du(k)$ (irrelevantes para estudio o análisis de controlabilidad.)

a) Si $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, ¿puede el sistema conducirse (controlarse) desde $x(0)$ hasta $x_f = (0,0)^{tr}$ en un paso? ¿Si ~~no~~ se puede, cómo debemos seleccionar $x(0)$ para que esto se pueda llevar a cabo?

b) repita (a). si $x(0) = (-6;-2)^{tr}$.

c). Establezca las condiciones generales que deben cumplirse sobre $x(0)$ para que el sistema pueda controlarse a $x_f = (0,0)^{tr}$

d) Sea $x(0) = (4, 10)^{tr}$. Determine $u = \{u(0), u(1)\}$ tal que $x(2) = (0,0)^{tr}$.

diez

Problema 10: Considere un sistema S descrito por

$$\frac{d}{dt} x(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & \alpha \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

Determine los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema es controlable.

Problema 11: Un sistema S está descrito por

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \quad ; \quad x(0) = (10, 1)^{tr} \text{ y}$$

$u(t) = esc(t)$

a) Determine la matriz resolvente del sistema

b) " " " transición de estados e^{At}

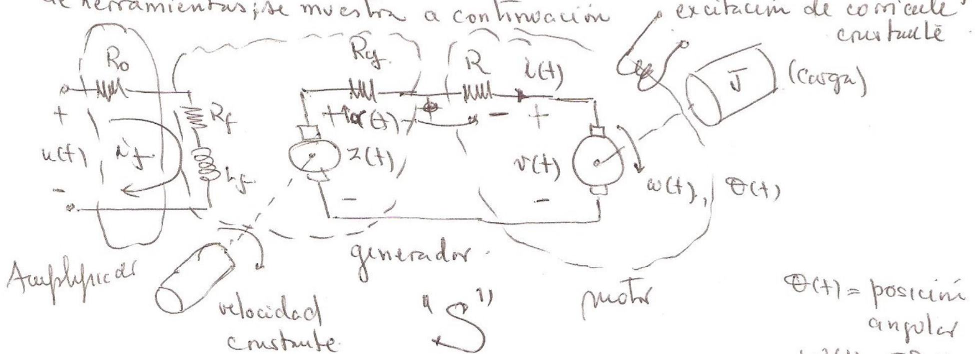
c) Encuentre $x_{nat}(t)$, $x_{forz}(t)$ y la trayectoria total de estados $x(t) = \phi(t, 0, x(0), esc(t))$; $t \geq 0$.

Nota: Use para (a), (b) y (c) la teoría de transformada de Laplace

PS2315: "Sistemas".
Dpto. Procesos y Sistemas.
Univ. Simón Bolívar.
Prof. José Ferrer.
Tri. Sep-Dic 2011.

Tarea 6 y 7.

Problema 1. Un sistema electrónicamente controlado para dirigir una maquina de herramientas, se muestra a continuación



$\theta(t)$ = posición angular
$\omega(t) = D\theta(t)$.

Se sabe que $z(t) = k_g\, i_f(t)$; k_g = constante del generador $\neq 1$.

$\omega(t) = k_m\, v(t)$

$i(t) = \dfrac{J}{k_I}\dfrac{d\omega}{dt}$.

a) Determine la función de transferencia de cada uno de los subsistemas mostrados a continuación

$\hat{u}(s) \rightarrow \boxed{\hat{h}_1(s)} \rightarrow \hat{i}_f(s)$ $\quad$ $\hat{i}(s) \rightarrow \boxed{\hat{h}_3(s)} \rightarrow \hat{\alpha}(s)$ $\quad$ $\hat{\omega}(s) \rightarrow \boxed{\hat{h}_5(s)} \rightarrow \hat{i}(s)$

$\hat{i}_f(s) \rightarrow \boxed{\hat{h}_2(s)} \rightarrow \hat{z}(s)$ $\quad$ $\hat{v}(s) \rightarrow \boxed{\hat{h}_4(s)} \rightarrow \hat{\omega}(s)$

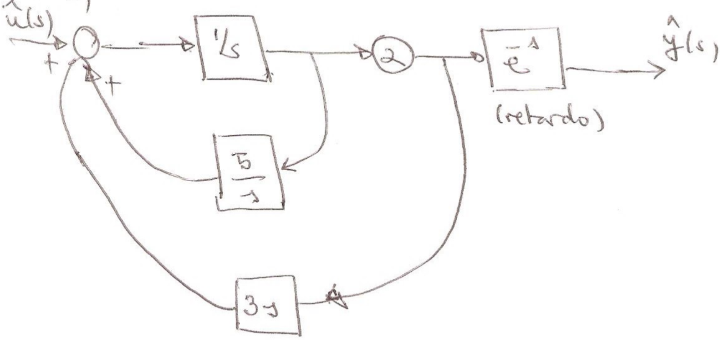
b) Usando los bloques de (a), dibuje el diagrama de bloques del sistema "interconectado" que representa al sistema "S" cuando la entrada es $u(t)$, y la salida es $y(t) = \omega(t)$.

c) Determine la función de transferencia del sistema S

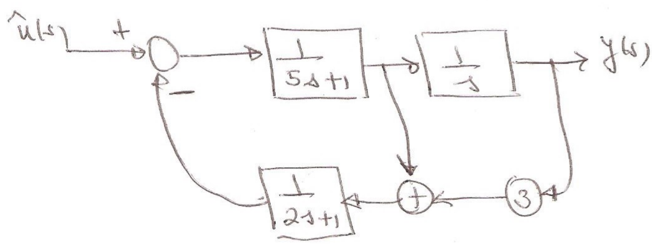
$$\hat{h}_p(s) = \hat{\omega}(s)/\hat{u}(s)$$

Problema 2. Determine la función de transferencia de los sistemas que se muestran a continuación:

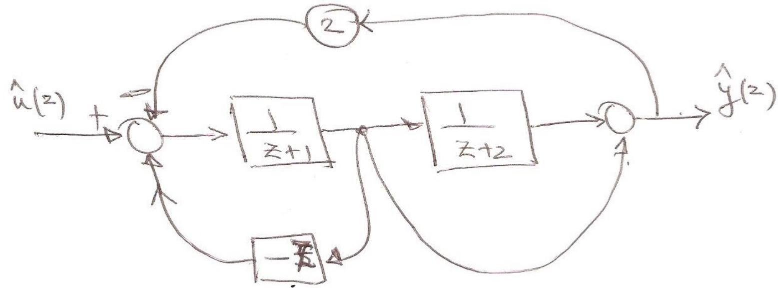
a)



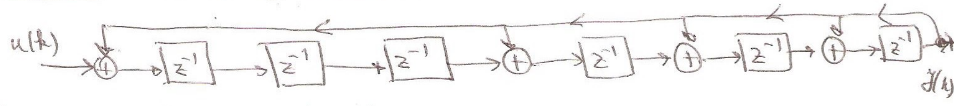
b)



c)



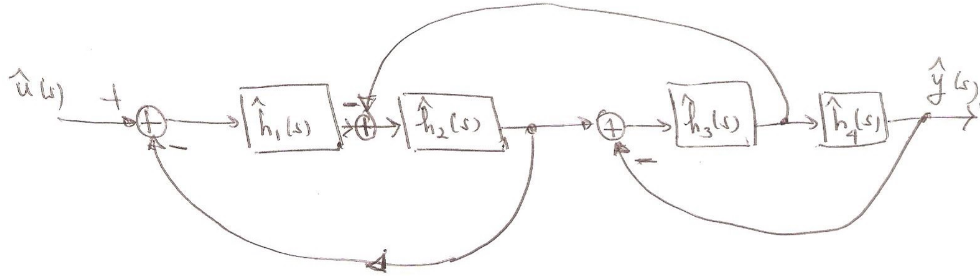
Problema 3: Sea S el sistema:



si $u(k) = \begin{cases} 1, & 0 \le k \le 4 \\ 0, & k \notin [0,4] \end{cases}$, encuentre $y(k) \geq 0$.

(La CI's $\equiv 0$) y use transformada Z y Z^{-1}.

Problema 4: Determine la F.T (función de transferencia) de



Problema 5: Determine la transformada unilateral (Laplace o Z) de las siguientes señales temporales.

i) $f(k)=\sin(2k)$; $k\geq 0$.

ii). $x(k)=2^{-k}\cos k$, $k\geq 0$

iii). $g(k)=k^2 a^{-k}$; $k\geq 0$.

iv) $x(t)=\sin t\cosh(t)-\cos t\sinh(t)$.

v) $f(t)=\dfrac{e^{-at}}{t}$; $t>0$

vi) $g(t)=\dfrac{1}{1+e^t}$; $t>0$.

Problema 6. Dado que la transformada de Laplace de una señal causal $x(t)$ es $\hat{x}(s)=\dfrac{1}{s^2+4s+8}$, encuentre la transformada de Laplace de

a) $\dfrac{x(t)}{t}\,\mathrm{esc}(t)$; b) $x(t)\sin t\,\mathrm{esc}(t)$; c) $x(5t+3)$, d) $t\dfrac{d^2x}{dt^2}$

Problema 7: Dado que la transformada Z de la señal causal $f(k)$ es :

$$\hat{f}(z)=\frac{e^2-1}{e}\cdot\frac{3}{(1-ze)(1-ze^{-1})}$$

encuentre la transformada Z-unilateral de:

i) $k\Delta f(k)$; ii) $f(2k-3)$, iii) $f(k)\sin(k)$

Problema 8: Sea $\hat{x}(s)$ la transformada de Laplace de $x(t)=x(t)\,\mathrm{esc}(t)$ y defina

$$\bar{\tau}=\frac{\int_0^\infty t\,x(t)\,dt}{\int_0^\infty x(t)} \quad ; \quad \delta^2=\frac{\int_0^\infty (t-\bar{\tau})^2 x(t)\,dt}{\int_0^\infty x(t)\,dt}.$$

Demuestre que: $\bar{\tau}=\dfrac{1}{\hat{x}(0)}\dfrac{d\hat{x}(s)}{ds}\Big|_{s=0}$ y $\delta^2=\dfrac{1}{\hat{x}(0)}\dfrac{d^2\hat{x}}{ds^2}\Big|_{s=0}-\bar{\tau}^2$.